

Lösen von (Un)gleichungen durch Äquivalenzumformungen

1 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x + 6 = 3 \quad | -6 \\
 \Leftrightarrow & -2 \cdot x = -3 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x = 1,5 \\
 & \mathbb{L} = \{1,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{1}{4} \cdot x - 5 = -7 \quad | +5 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \cdot x = -2 \quad | \cdot 4 \\
 \Leftrightarrow & x = -8 \\
 & \mathbb{L} = \{-8\}
 \end{aligned}$$

2 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen **negativen Zahl** multipliziert oder durch sie dividiert **und** das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x < 14 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x > -7 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -7\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 6 \cdot x > -27 \quad | :6 \\
 \Leftrightarrow & x > -4,5 \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -4,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & -\frac{1}{4} \cdot x + 5 \geq -3 \quad | -5 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{4} \cdot x \geq -8 \quad | \cdot (-4) \\
 \Leftrightarrow & x \leq 32 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x \leq 32\}
 \end{aligned}$$

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die folgenden Gleichungen und Ungleichungen mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$:

a) $-5x + 36 = 28$

b) $-x - 67 \leq 34$

c) $2x + 13 \leq -18$

d) $-12x - 41 > -23$

e) $(177 - 202) \cdot x + 296 = 411$

f) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x < -\frac{1}{6}$

g) $2^3 - x \geq 3^2 \cdot 2$