Mathematik

Abiturprüfung 2021

Prüfungsteil B (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_p von p.

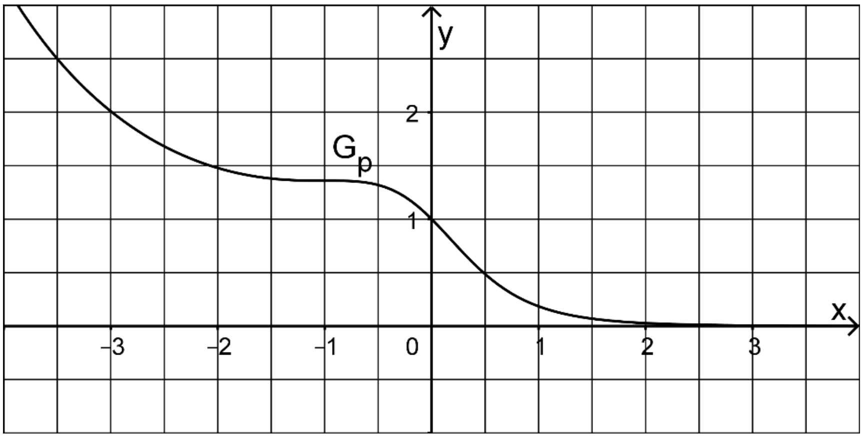


Abb. 1

3 **a)** Begründen Sie jeweils anhand des Funktionsterms von p, dass $D = \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$ ist.

3 **b)** Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, in dem G_p eine waagrechte Tangente besitzt, der jedoch kein Extrempunkt von G_p ist.

3 **c)** Für die Gerade g mit der Gleichung $y = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$ gibt es genau zwei unterschiedliche Stellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sodass die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(1) $p(x_1) = mx_1 + t$
(2) $p'(x_1) = m$
(3) $p(x_2) = mx_2 + t$
(4) $p'(x_2) = m$

Erläutern Sie ohne Rechnung, welche Lagebeziehung die Gerade g zu G_p hat, und zeichnen Sie g in Abbildung 1 ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_{a,b}: x \mapsto abx - bx^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

2 **a)** Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von $G_{a,b}$.

4 **b)** Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von $G_{a,b}$.

(zur Kontrolle: x-Koordinate des Tiefpunkts: $-\frac{1}{3}\sqrt{3a}$)

4 **c)** Für jeden vorgegebenen Wert von b kann man einen Wert für a finden, sodass der Inhalt der von $G_{a,b}$ und der x-Achse im ersten Quadranten eingeschlossenen Fläche den Wert 1 besitzt. Weisen Sie diesen Sachverhalt nach.

2 **d)** Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass der Tiefpunkt von $G_{a,b}$ die Koordinaten $(-5 \mid -2{,}5)$ hat.

Die Funktion $f_{a,b}$ mit $a = 75$ und $b = \frac{1}{100}$ wird mit f bezeichnet, d. h. $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{100}x^3$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

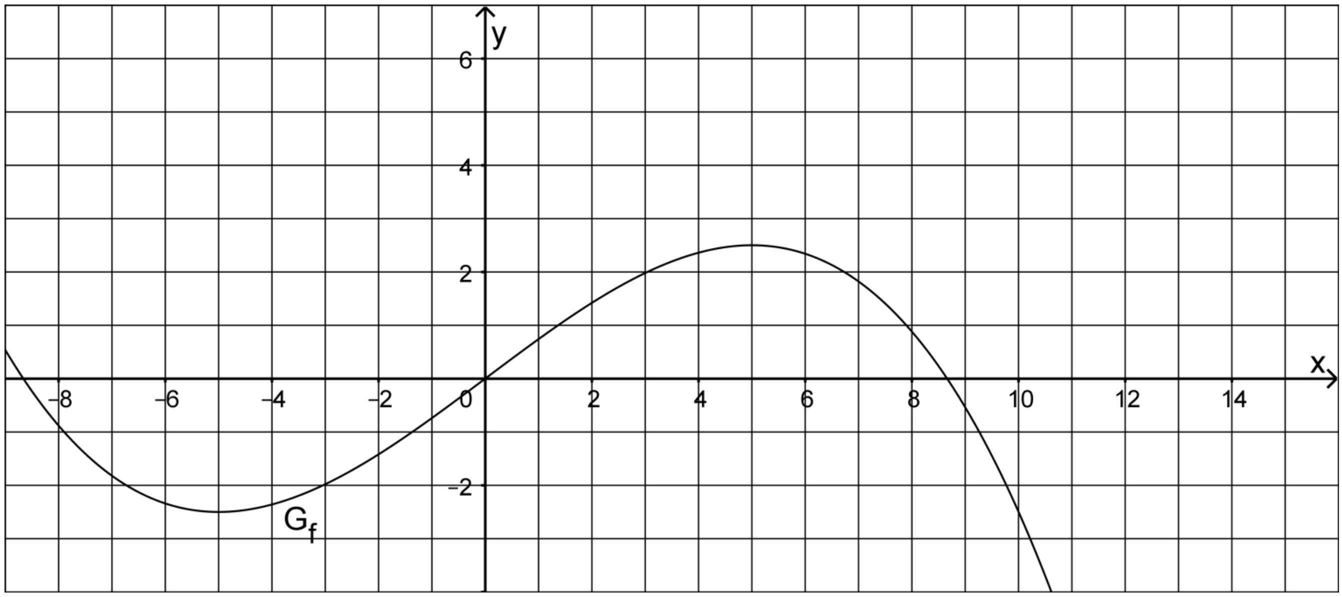


Abb. 2

4 **e)** Der Graph G_g der Funktion g wird aus G_f durch Verschiebung erzeugt, sodass der Tiefpunkt von G_g im Koordinatenursprung liegt. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von g und zeichnen Sie G_g in Abbildung 2 ein.

(zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{100}x^2 \cdot (15 - x)$)

3 **f)** Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto |g(x)|$. Erläutern Sie, aus welcher Eigenschaft von G_g folgt, dass h an einer Stelle nicht differenzierbar ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Für die ersten 15 Minuten nach Einsetzen eines Starkregens wird die momentane Durchflussrate an einer Messstelle eines Hochwasserkanals mit der Funktion g modelliert. Dabei bezeichnet x die Zeit in Minuten nach Einsetzen des Starkregens und $g(x)$ die Durchflussrate des Wasservolumens in Kubikmetern pro Sekunde. Abbildung 3 zeigt den Querschnitt des Kanals am Ort der Messstelle.

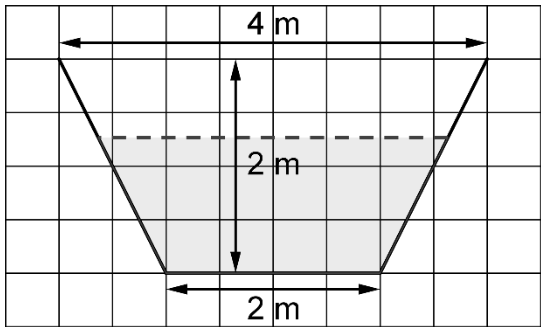


Abb. 3

2 **g)** Geben Sie für $x \in [0;15]$ die Lösungen der Gleichung $g(x) = 2$ an und interpretieren Sie die Lösungen im Sachzusammenhang.

3 **h)** Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderung der Durchflussrate am größten ist.

2 **i)** Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das in den ersten 15 Minuten nach Einsetzen des Starkregens die Messstelle passiert.

5 **j)** In einem stark vereinfachten Modell wird angenommen, dass das Wasser im Kanal gleichmäßig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1,5 Metern pro Sekunde fließt. Unter dieser Voraussetzung ergibt der Quotient aus der Durchflussrate und der Geschwindigkeit des Wassers die Querschnittsfläche des Wasserstroms am Ort der Messstelle (vgl. Abbildung 3). Ermitteln Sie die maximale Höhe, die der Wasserspiegel im Kanal während der ersten 15 Minuten am Ort der Messstelle erreicht.

40

Analysis
Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto a \cdot \ln(x) + 3$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

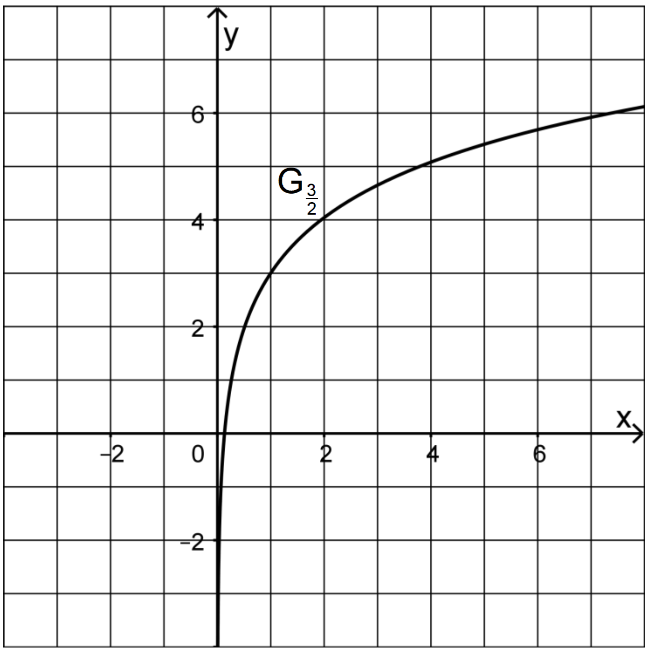
3 **a)** Beschreiben Sie, wie G_a aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln(x)$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von f_a an.

3 **b)** Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, durch den die Graphen aller Funktionen der Schar verlaufen, und geben Sie dessen Koordinaten an.

6 **c)** Weisen Sie nach, dass die Steigungen der Graphen G_a im jeweiligen Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse den Wert 3e nicht unterschreiten.

2 **d)** Begründen Sie, dass alle Funktionen der Schar umkehrbar sind.

Die Abbildung zeigt den Graphen $G_{\frac{3}{2}}$ der Funktion $f_{\frac{3}{2}}$. Die Umkehrfunktion von $f_{\frac{3}{2}}$ wird mit g bezeichnet.



2 **e)** Ergänzen Sie den Graphen von g in der Abbildung.

6 **f)** $G_{\frac{3}{2}}$ und der Graph von g schließen ein Flächenstück ein, das von einer Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ in zwei Flächenstücke gleichen Inhalts zerlegt wird. Ermitteln Sie b auf zwei Dezimalen genau.

2 In der Umgebung einer Schallquelle gibt der Term

$L(r) = -\frac{20}{\ln 10} \cdot \ln(r) + 120 - \frac{r}{200}$ für $r > 1$ näherungsweise die Lautstärke in Dezibel (dB) in Abhängigkeit vom Abstand r zur Schallquelle in Metern an. In der Regel können Geräusche mit Lautstärken von mehr als 0 dB vom Menschen wahrgenommen werden, ab einer Lautstärke von etwa 100 dB werden Geräusche als unangenehm empfunden. Eine Person befindet sich in der Nähe der Schallquelle.

2 **a)** Die Person vergrößert ihren Abstand zur Schallquelle von 10 m auf 30 m. Berechnen Sie, um wie viele Dezibel sich die Lautstärke verändert, die die Person dabei wahrnimmt.

2 **b)** Bestimmen Sie näherungsweise denjenigen Wert von r, für den $L(r) = 0$ gilt, und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

Die Person bewegt sich entlang eines Wegs, der an der Schallquelle vorbeiführt. Die Situation wird in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 m modelliert, wobei der Punkt $Q(0\,|\,3)$ die Position der Schallquelle darstellt. Die Positionen der Person werden im Modell durch die auf der x-Achse befindlichen Punkte $P_u(u\,|\,0)$ mit $u \in [-50;100]$ angegeben.

3 **c)** Begründen Sie, dass der Term $r(u) = \sqrt{u^2 + 9}$ in Abhängigkeit von u den Abstand der Person von der Schallquelle in Metern beschreibt.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $L_W : u \mapsto L(r(u))$ ordnet jedem Wert von u die Lautstärke in Dezibel am Punkt P_u zu.

2 **d)** Geben Sie die größte Lautstärke in Dezibel an, die die Person entlang des Wegs wahrnimmt.

3 **e)** Ermitteln Sie die Länge des Wegabschnitts, auf dem die Lautstärke die Unbehaglichkeitsschwelle von 100 dB übersteigt.

6 **f)** Der Graph der Funktion L_W besitzt für $u > 0$ genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie dessen Koordinaten und die Steigung der zugehörigen Wendetangente jeweils auf eine Dezimale genau. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser drei Werte sowie die Bedeutung des Wendepunkts im Sachzusammenhang.

Hinweis: Führen Sie die Berechnungen mit dem CAS näherungsweise durch.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

4 **1** An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}; \; P(B) = \frac{6}{6^4}$$

Geben Sie im Sachzusammenhang einen möglichen Grund dafür an, dass die Wahl der Kasse in der Realität nicht jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit erfolgt.

2 Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15 % der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familie höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

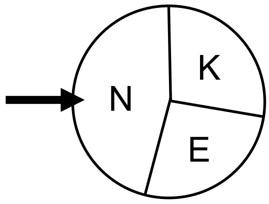
2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.

2 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.

4 **c)** Ermitteln Sie den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % liegen.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **3** Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erzielt, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.



4 Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

2 **a)** Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

2 **b)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat.

2 **c)** Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90 % ist.

2 **d)** Zeigen Sie rechnerisch anhand des Terms in Aufgabe b, dass bei einer sehr großen Anzahl verschiedener Motive im Automaten es nahezu sicher ist, dass die drei ausgedruckten Anstecker unterschiedliche Motive haben.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

3 **1** Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

2 Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25 % beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.

4 **b)** Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

i. $\binom{50}{10} \cdot 0{,}75^{10} \cdot 0{,}25^{40}$

ii. $\sum_{k=0}^{3} \left(0{,}75^{k} \cdot 0{,}25\right)$

3 **c)** Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42 % der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63 % der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$.

2 **c)** Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1-P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

4 Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

3 **a)** Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X.

2 **b)** Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.

Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n)=n$ und $Var(Y_n)=n$. Bestimmen Sie, ab welchem Wert von n die relative Standardabweichung kleiner als 3 % wird.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

4 **a)** Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

2 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$*)*

2 **c)** Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide ABCDS.

(zur Kontrolle: $V = 72$*)*

2 **d)** Mithilfe der folgenden beiden Gleichungen lässt sich die Größe eines Winkels ε berechnen:

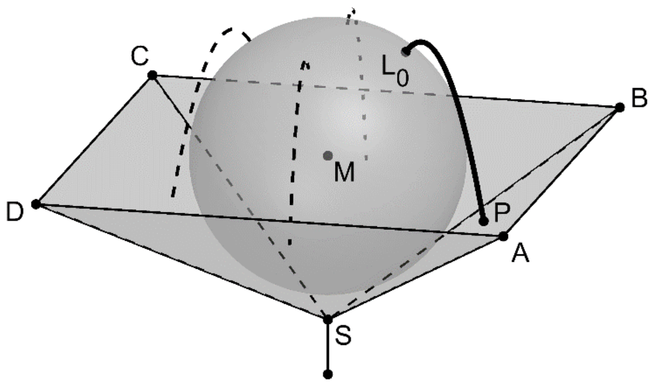
I. $$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

II. $\varepsilon = (90^\circ - \varphi) \cdot 2$

Beschreiben Sie eine mögliche Bedeutung von ε im Zusammenhang mit der Pyramide.

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



4 **e)** Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$ *)*

2 **f)** Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t\left(t+1\,|\,t+1\,|\,6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2\right)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

3 **g)** Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

2 **h)** Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.

4 **i)** Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.

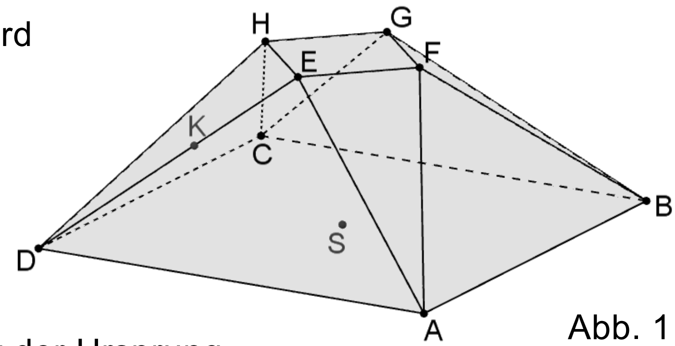


Abb. 1

Der Mittelpunkt S des Quadrats ABCD ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene.

2 **a)** Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

3 **b)** Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$*)*

3 **c)** Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Auf der Strecke $[DE]$ gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

4 **d)** Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

(zur Kontrolle: $K(3{,}2|-2|2{,}4)$*)*

5 **e)** Der Mittelpunkt der Strecke $[KF]$ wird mit N bezeichnet. Begründen Sie, dass die Gerade EN die Winkelhalbierende des Dreiecks DFE bei E ist, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

5 **f)** Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.

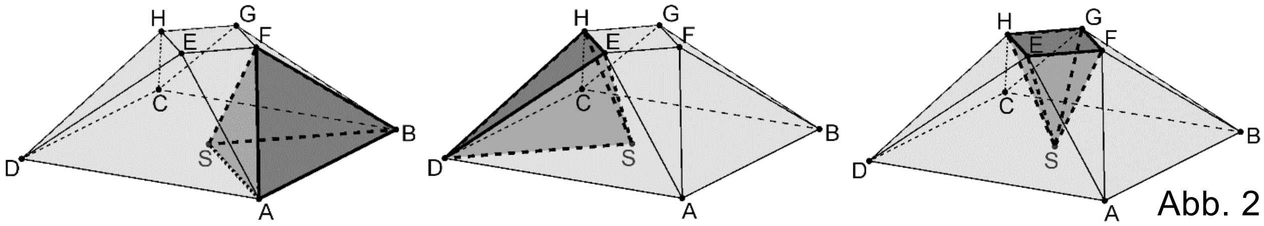


Abb. 2

3 **g)** Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

25