

10 Mathematik I

(5-stündig)

Das mathematische Wissen wird zu einem tragfähigen Fundament für den weiteren schulischen oder beruflichen Weg der Realschulabsolventen ausgebaut. Die Verflechtung von Geometrie und Algebra erfährt mit den Gebieten Trigonometrie und Abbildungen eine besondere Ausprägung.

Beim Erarbeiten und beim Einüben von Lerninhalten aus Algebra und Geometrie vertiefen die Schüler den Umgang mit geeigneten Computerprogrammen und die Verwendung elektronischer Rechenhilfsmittel, wie z. B. des grafikfähigen Taschenrechners.

Offene Aufgabenstellungen sowie Variationen von Aufgaben und Lösungswegen fördern die Vernetzung und Vertiefung der Lerninhalte. Bei der Auswahl von Aufgaben ist auch auf eine enge Verbindung des Themenbereichs 10.4 mit den Themenbereichen 10.1 und 10.2 zu achten.

Das Grundwissen wird erweitert um:

Grundwissen

- Potenzterme mithilfe der Potenzgesetze umformen
- Graphen und Eigenschaften von Potenzfunktionen mit $y = x^{\frac{m}{n}}$
- Graphen und Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen
- mithilfe der Definition des Logarithmus und der Benutzung des Taschenrechners Terme umformen und einfache Exponentialgleichungen lösen
- Definition von $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ und $\tan \varphi$; Werte und Winkelmaße mithilfe des Taschenrechners ermitteln
- Seitenlängen und Winkelmaße im rechtwinkligen und im beliebigen Dreieck berechnen
- Skalarprodukt anwenden
- Koordinaten von Bild- und Ursprungspunkten bei den bekannten Abbildungen berechnen sowie Gleichungen von Bildgraphen ermitteln
- Vektoren und 2×2 -Matrizen verwenden

M 10.1 Potenzen und Potenzfunktionen

(ca. 14 Std.)

Die Schüler lernen die Erweiterung des Potenzbegriffes kennen und erfahren dabei, dass die ihnen bereits bekannten Potenzgesetze weiterhin gelten. Sie eignen sich die Potenzschreibweise für Wurzeln an. Aufbauend auf ihre Fertigkeiten im Umgang mit Funktionen erschließen sie sich die Potenzfunktionen sowie deren Eigenschaften und wenden ihr Wissen in vielfältigen Aufgaben an.

- Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten; $\sqrt[n]{a}$ als nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$ für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$; Potenzgesetze; Umformungen von Potenztermen
- Potenzfunktionen mit $y = x^{\frac{m}{n}}$ und ihre Umkehrfunktionen; Eigenschaften; Diskussion der Graphen (Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung) auch unter Zuhilfenahme elektronischer Rechenhilfsmittel
- Abbilden von Funktionsgraphen durch Parallelverschiebung, Achsenspiegelung (y-Achse und w mit $y = x$ als Spiegelachsen) und orthogonale Affinität (x-Achse als Affinitätsachse) nur für Funktionen mit $y = x^n$ bzw. $y = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

M 10.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

(ca. 19 Std.)

Exponentialfunktionen spielen ebenso wie ihre Umkehrfunktionen, die Logarithmusfunktionen, eine tragende Rolle, wenn es darum geht, Wachstums- oder Abklingprozesse in Natur, Wirtschaft und Technik quantitativ zu erfassen und funktional darzustellen. Das Auffinden der Lösung eines charakteristischen Beispiels soll die Schüler zunächst zur

Gleichung einer Exponentialfunktion führen. Sie untersuchen die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und ihren Umkehrfunktionen, werden mit dem Begriff des Logarithmus vertraut und lernen Exponentialgleichungen zu lösen. Mithilfe dieser neuen Erkenntnisse werden die Schüler befähigt, auch Vorgänge aus vielen Bereichen ihrer Umwelt mathematisch zu erfassen und zu beschreiben. Dabei erkennen sie Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Methoden.

- Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen (Logarithmusfunktionen); Eigenschaften; Diskussion der Graphen auch unter Zuhilfenahme elektronischer Rechenhilfsmittel
- Definition des Logarithmus $\log_b a$; Logarithmensätze und deren Anwendung bei Termumformungen; Berechnen von Logarithmen zu einer beliebigen Basis; $\lg x$ (dekadischer Logarithmus) am Taschenrechner (aus der Geschichte: die Entwicklung von Rechenhilfsmitteln)
- Gleichungen, die sich auf die Form $a \cdot b^{x+c} + d = 0$ bringen lassen
- Aufgaben über Wachstums- und Abklingprozesse
- Funktionen mit $y = a \cdot b^{x+c} + d$ bzw. $y = a \cdot \log_b(x+c) + d$; Umkehrfunktionen ermitteln; Abbilden der Funktionsgraphen durch Parallelverschiebung, Achsenspiegelung (y-Achse und w mit $y = x$ als Spiegelachsen) und orthogonale Affinität (x-Achse als Affinitätsachse)

M 10.3 Trigonometrie

(ca. 52 Std.)

Die Schüler lernen Polarkoordinaten als eine weitere Möglichkeit zur Darstellung von Punkten und Punktengen kennen und erarbeiten den Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten. Sie eignen sich Kenntnisse über rechnerische Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkelmaßen im Dreieck an und lernen, auch solche Längen- und Winkelmaße zu berechnen, die sie bisher nur konstruktiv bestimmen konnten. Dabei erhalten sie auch einen Einblick in die Rolle trigonometrischer Funktionen und Berechnungen in Bereichen wie Vermessungswesen, Technik und Physik. Darüber hinaus erkennen die Schüler, dass sich mithilfe des Skalarprodukts von Vektoren der Lösungsweg bei vielen Aufgaben erheblich vereinfachen lässt.

Definition von Kosinus, Sinus, Tangens (ca. 10 Std.)

- Polarkoordinaten von Punkten bzw. Vektoren
- Zeichnen von Punktengen, die durch Polarkoordinaten beschrieben sind
- Definition von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ als kartesische Koordinaten eines Einheitsvektors \vec{OP} mit $P(1|\varphi)$; Wertebereiche; $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$
- Definition von $\tan \varphi$ und Darstellung von $\tan \varphi$ am Einheitskreis; Zusammenhang zwischen der Steigung m einer Geraden g und dem Maß des Winkels zwischen der x-Achse und g

Trigonometrische Funktionen (ca. 2 Std.)

- Bogenmaß
- Funktionen mit $y = \cos x$, $y = \sin x$ und $y = \tan x$ und ihre Graphen

Berechnungen und Zusammenhänge (ca. 8 Std.)

- $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $\tan \varphi$ für $\varphi \in \{0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$; Ermitteln von Werten für $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $\tan \varphi$ mithilfe eines Taschenrechners
- φ aus $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = a$, $\tan \varphi = a$ für $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$ ermitteln; Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten
- Komplement- und Supplementbeziehungen für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$; $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ und $\tan \varphi$ für negativ orientierte Winkel
- äquivalente Terme zu $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin \frac{\alpha}{2}$ und $\cos \frac{\alpha}{2}$ ermitteln

Berechnungen in Dreiecken (ca. 20 Std.)

- Berechnen von Seitenlängen und Innenwinkelmaßen im rechtwinkligen Dreieck und im beliebigen Dreieck (Sinussatz und Kosinussatz)
- Bearbeiten von Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten und Extremwertuntersuchungen; Lösen von goniometrischen Gleichungen, die sich bei derartigen Aufgaben ergeben

Skalarprodukt (ca. 12 Std.)

- orthogonale Vektoren und Skalarprodukt; Verknüpfungsgesetze; Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel
- Anwenden des Skalarprodukts von Vektoren (Nachweis der Orthogonalität; Berechnung von Winkelmaßen; Ermitteln des Abstands von Punkt und Gerade, der Koordinaten von Punkten mit besonderen Eigenschaften und der Werte für Formvariablen unter speziellen Bedingungen)

M 10.4 Abbildungen im Koordinatensystem**(ca. 35 Std.)**

Die Schüler lernen, für jede der ihnen bereits bekannten geometrischen Abbildungen der Ebene jeweils die Abbildungsvorschrift mithilfe von Vektoren und Matrizen in einheitlicher algebraischer Form anzugeben. Damit und mit den bereits erworbenen Fertigkeiten im Umgang mit trigonometrischen Termen werden sie befähigt, Abbildungen zu algebraisieren und auch Problemstellungen aus der ebenen Geometrie der vorhergehenden Jahrgangsstufen aufzugreifen und mithilfe von Abbildungen algebraisch zu lösen.

- Multiplikation einer 2×2 -Matrix mit einem Vektor
- Parallelverschiebung
- Drehung (bei Drehung mit Drehzentrum ungleich Ursprung keine Verwendung einer Formel)
- Achsenspiegelung (beliebige Ursprungsgerade als Spiegelachse)
- zentrische Streckung (Streckung mit Streckungszentrum ungleich Ursprung ohne Verwendung einer Formel)
- orthogonale Affinität (x -Achse als Affinitätsachse)
- Verknüpfung der genannten Abbildungen (Verzicht auf die Multiplikation von 2×2 -Matrizen)
- Berechnen der Koordinaten von Bild- bzw. Ursprungspunkten sowie von Fixpunkten und der Gleichungen von Bildgeraden für die genannten Abbildungen
- Berechnen der Gleichungen von Bildparabeln zweiter Ordnung bei Parallelverschiebung, zentrischer Streckung und orthogonaler Affinität (x -Achse als Affinitätsachse)
- Berechnen der Gleichungen von Bildgraphen, die bei der Abbildung von Graphen zu Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen entstehen
- spezielle Aufgaben der ebenen Geometrie mithilfe von Abbildungen geometrisch und algebraisch lösen (insbesondere Einbeschreibungsaufgaben; Gleichungen von Trägergraphen und von geometrischen Ortslinien)

10 Mathematik II/III

(4-stündig)

In der Jahrgangsstufe 10 runden die Schüler die bisher erworbenen mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten ab und bauen sie zu einem tragfähigen Fundament für ihren weiteren schulischen oder beruflichen Weg aus. Die Verflechtung zwischen Algebra und Geometrie erfährt in den Gebieten Trigonometrie und Stereometrie eine besondere Ausprägung. Offene Aufgabenstellungen sowie Variationen von Aufgaben und Lösungswegen fördern die Vernetzung und Vertiefung der Lerninhalte. Beim Erarbeiten und beim Einüben von Lerninhalten verknüpfen die Schüler einzelne Themen und vertiefen den Umgang mit geeigneten Computerprogrammen und die Verwendung elektronischer Rechenhilfsmittel, z. B. des grafikfähigen Taschenrechners.

Das Grundwissen wird erweitert um:

Grundwissen

- Graphen und Eigenschaften quadratischer Funktionen; Scheitelform
- Gleichungen von Parabeln ermitteln
- quadratische Gleichungen: Lösungsformel, Bedeutung der Diskriminante, Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen
- Mantel- bzw. Oberfläche und Volumen von Prismen, Pyramiden, geraden Kreiszylindern und Kreiskegeln sowie von Kugeln
- Definition von $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ und $\tan \varphi$; Werte und Winkelmaße mithilfe des Taschenrechners ermitteln
- Seitenlängen und Winkelmaße in Dreiecken berechnen

M 10.1 Quadratische Funktionen [VSE]

(ca. 15 Std.)

Die Schüler beschäftigen sich mit quadratischen Funktionen und deren Graphen und erweitern und vertiefen dabei ihre bisher erworbenen Kenntnisse über Funktionen. Sie lernen, wie man die Eigenschaften von Graphen auffindet und wie man hierfür ein elektronisches Rechenhilfsmittel einsetzen kann.

- Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$: Graphen und Eigenschaften; Sonderformen; Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung für verschobene Parabeln
- Gleichungen von Parabeln ermitteln
- Bearbeiten von Extremwertproblemen (nur quadratische Terme)

M 10.2 Funktionen der indirekten Proportionalität und Exponentialfunktionen

(ca. 7 Std.)

Die Schüler wiederholen anhand praktischer Beispiele ihre Kenntnisse über die indirekte Proportionalität. Mit Vorgängen aus Bereichen ihrer Umwelt wie Wachstums- und Abklingprozesse lernen sie Exponentialfunktionen kennen und mathematisch beschreiben. In beiden Fällen setzen sie ein elektronisches Rechenhilfsmittel, z. B. den grafikfähigen Taschenrechner, ein.

- Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \frac{k}{x}$; Hyperbeln als Graphen; Eigenschaften und Asymptoten der Graphen
- Beispiele für Exponentialfunktionen; Definition und Graph
- Ermittlung von Größen mithilfe von Wertetabellen und Graphen

M 10.3 Quadratische Gleichungen

(ca. 20 Std.)

Die Schüler lernen, quadratische Gleichungen mit einer Variablen sicher zu lösen. Damit werden sie befähigt, geometrische Zusammenhänge in Aufgaben aus den Bereichen Abbildungen, Flächensätze und Raumgeometrie algebraisch zu bearbeiten. Darüber hinaus wenden sie die bisher erworbenen Kenntnisse an, um Schnitt- und Tangentialprobleme zu erörtern und Lösungen dafür zu finden.

- Quadratische Gleichungen lösen (quadratische Ergänzung, auch grafische Lösung); Lösungsformel; Diskriminante und Lösbarkeit
- Berechnen der Koordinaten von Schnittpunkten (Gerade \cap Parabel, Parabel \cap Parabel)
- Untersuchen der Tangentiallage zweier Funktionsgraphen

M 10.4 Berechnungen am Kreis

(ca. 10 Std.)

Die Schüler begründen den bereits bekannten proportionalen Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser bzw. zwischen dem Inhalt der Kreisfläche und dem Quadrat des Kreisradius, und zwar mithilfe anschaulich durchgeführter Grenzwertüberlegungen. Eine näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl (Proportionalitätsfaktor) führen die Schüler mithilfe des Taschenrechners oder des Computers durch.

- Kreiszahl π und ihre näherungsweise Bestimmung; Umfang und Flächeninhalt des Kreises (aus der Geschichte: Kreiszahl π)
- Kreisbogen und Kreissektor
- Berechnungen am Kreis und bei Kreisteilen (auch an zusammengesetzten Figuren)

M 10.5 Raumgeometrie

(ca. 19 Std.)

Die Schüler verwenden den Satz über die Zerlegungsgleichheit von Körpern, um aus dem bereits bekannten Volumen des Quaders das Volumen eines geraden Prismas herzuleiten. Sie lernen das Prinzip des Cavalieri kennen und erfahren, wie man mit ihm das Volumen weiterer Körper ermitteln kann. Sie erarbeiten Volumenformeln mithilfe von Grenzwertüberlegungen und setzen dabei den Computer ein. Mithilfe geeigneter Modelle erzeugen die Schüler Rotationskörper und gewinnen Formeln zur Berechnung des Volumens bzw. der Oberfläche dieser Körper.

- Prisma und Pyramide: Netz, Mantelfläche, Oberfläche; Prinzip des Cavalieri; Volumen von Prisma und Pyramide
- gerader Kreiszylinder und gerader Kreiskegel als Rotationskörper: Axialschnitt, Mantellinie; Abwicklung, Mantel- und Oberfläche; Volumen durch Grenzwertbetrachtungen
- Kugel: Oberfläche und Volumen
- Anwendungsaufgaben unter besonderer Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten und auch unter Einbeziehung zusammengesetzter Körper

M 10.6 Trigonometrie

(ca. 25 Std.)

Die Schüler eignen sich Kenntnisse über rechnerische Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkelmaßen im Dreieck an und lernen, auch die Längen- und Winkelmaße zu berechnen, die sie bisher nur konstruktiv bestimmen konnten. Dabei erhalten sie einen Einblick in die Rolle trigonometrischer Berechnungen in Bereichen wie Vermessungswesen, Technik und Physik.

Definition von Kosinus, Sinus, Tangens

- Definition von $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $\tan \varphi$; Veranschaulichung am Einheitskreis; Wertebereiche;
- $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$; $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$
- Zusammenhang zwischen der Steigung m einer Geraden g und dem Maß des Winkels zwischen der x -Achse und g

Berechnungen und Zusammenhänge

- Ermitteln von Werten für $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, $\tan \varphi$ mit dem Taschenrechner
- Kennenlernen der Graphen von Funktionen mit $y = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ und $y = \tan \alpha$ mithilfe elektronischer Medien
- φ aus $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = a$, $\tan \varphi = a$ für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ ermitteln; Supplementbeziehungen für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$
- $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ und $\tan \varphi$ für negativ orientierte Winkel

Berechnungen in Dreiecken

- Berechnen von Seitenlängen und Innenwinkelmaßen im rechtwinkligen Dreieck und im beliebigen Dreieck (Sinussatz und Kosinussatz)
- Bearbeiten von Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie (ohne funktionale Abhängigkeit von einem variablen Winkelmaß)

Praxisorientierte Aufgaben aus verschiedenen Bereichen