## 1 Algebraische Grundlagen

| | | |
|---|---|---|
| **Binomische Formeln** | $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| | $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ | $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$ |

**Absolutbetrag**

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

**Wurzeln und Potenzen**

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$ | $\sqrt{a} \geq 0$ | $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ |
| $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ | $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ | $\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{\text{n Faktoren}} = a$ |
| $a^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ | $a^0 = 1$ | $a^1 = a$ |
| $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ | $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ |
| $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$ | $a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$ | $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ |
| $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ | |

**Logarithmen**

$$\log_b a = z \quad \Leftrightarrow \quad b^z = a$$

| | |
|---|---|
| $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$ | $\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$ |
| $\log_b u^z = z\cdot\log_b u$ | $\log_c a = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Geradengleichung** | $y = m\cdot x + t$ | (allgemeine Form) |
| | $y = m\cdot(x - x_0) + y_0$ | (Punkt-Steigungs-Form) |
| **Parabelgleichung** | $y = ax^2 + bx + c$ | (allgemeine Form) |
| | $y = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$ | (Scheitelform) |
| | $y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ | (Linearfaktorform) |

**Lösungsformel für die quadratische Gleichung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 2 Analysis

| | | |
|---|---|---|
| **Symmetrie bezüglich des Koordinaten-systems** | $\left.\begin{array}{l} f(-x)=f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow$ | $G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse (f heißt dann gerade Funktion) |
| | $\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow$ | $G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung (f heißt dann ungerade Funktion) |
| **Differenzen-quotient** | $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ | (Sekantensteigung bzgl. $x_0$ und $x$) |

**Ableitung $f'(x_0)$ (Differential-quotient)**

Besitzt der Graph $G_f$ an der Stelle $x_0$ eine eindeutige Tangente, so wird die Steigung dieser Tangente mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Dann gilt: $x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$

Schreibweisen: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$

$\dot{s}(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$

**Ableitung der Grundfunktionen**

$$\frac{d}{dx}(x^r)=r\cdot x^{r-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^r}\right)=-\frac{r}{x^{r+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}$$

**Ableitungsregeln**

$f(x)=u(x)+v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)+v'(x)$

$f(x)=c\cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=c\cdot u'(x)$

$f(x)=u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

$f(x)=u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

| | | |
|---|---|---|
| **Monotonie-kriterium** | $f'(x) < 0$ im Intervall I | $\Rightarrow$ $G_f$ fällt streng monoton in I. |
| | $f'(x) > 0$ im Intervall I | $\Rightarrow$ $G_f$ steigt streng monoton in I. |
| **Art von relativen Extrema** | $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ | $\Rightarrow$ f hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Minimum. |
| | $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ | $\Rightarrow$ f hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Maximum. |
| **Graphen-krümmung** | $f''(x) < 0$ im Intervall I | $\Rightarrow$ $G_f$ ist in I rechtsgekrümmt. |
| | $f''(x) > 0$ im Intervall I | $\Rightarrow$ $G_f$ ist in I linksgekrümmt. |

**Wendepunkt**

Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt.

**Terrassenpunkt**

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Terrassenpunkt.

**Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**

Ist f eine in [a; b] stetige Funktion, so ist

die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und

$F_a$ ist eine Stammfunktion von f, d. h. $F_a'(x) = f(x)$.

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Partielle Integration**

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\,dx$$

**Integration durch Substitution**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \quad \text{mit } x = g(t)$$

**Volumen eines Rotationskörpers**

Rotation um die x-Achse: $V = \pi \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f(x)\right)^2 dx$

Rotation um die y-Achse: $V = \pi \cdot \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$

---

**Unbestimmte Integrale**

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \ln x\,dx = -x + x \cdot \ln x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$

$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$ wobei F eine Stammfunktion von f ist

---

**Grenzwerte**

für $r > 0$ gilt:

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^r \cdot e^x \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{x^r}{e^x} \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x}{x^r} \to 0$

$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad x^r \cdot \ln x \to 0$

## 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\Omega$ sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und $A, B \subseteq \Omega$ seien zwei beliebige Ereignisse.

| | | |
|---|---|---|
| **Gesetze der Mengenalgebra** | $\overline{A} = \Omega \setminus A$ <br> $\overline{\overline{A}} = A$ | $A \cap \overline{A} = \{\ \}$ <br> $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ |
| **Gesetze von De Morgan** | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| **Unvereinbarkeit** | $A \cap B = \{\ \}$ $\Leftrightarrow$ A und B heißen unvereinbar. | |
| **Ereigniswahrscheinlichkeiten** | $P(\{\ \}) = 0$ <br> $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ | $P(\Omega) = 1$ |
| **Satz von Sylvester** | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | |
| **Bedingte Wahrscheinlichkeit** | $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ | |
| **Unabhängigkeit von zwei Ereignissen** | $P_A(B) = P(B)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ <br> $\Leftrightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig. | |
| **Fakultät** | $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ <br> Der Wert $n!$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen. | |
| **Binomialkoeffizient** | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ <br> Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden. | |
| **Laplace-Experiment** | Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind. <br> Es gilt dann: $P(A) = \frac{\lvert A \rvert}{\lvert \Omega \rvert}$ | |

**Maßzahlen von Zufallsgrößen**

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an.

Dann gilt:

- **Erwartungswert**

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

- **Varianz**

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad \text{(Verschiebungsregel)}$$

- **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

---

**Binomialverteilung**

Eine Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.

Dann gilt:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt Binomialverteilung.
- X heißt binomialverteilt, genauer B(n; p)-verteilt.

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für k = 0, 1, ... , n
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

---

**Hypothesentest**

Beim Testen der Nullhypothese $H_0$ in einem Signifikanztest mit Signifikanzniveau $\alpha$ können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: $H_0$ wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art: $H_0$ wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau $\alpha$ des Tests ist die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

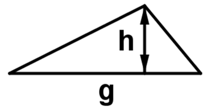
## 4 Geometrie

### Flächengeometrie

A: Flächeninhalt
U: Umfang

**Allgemeines Dreieck**

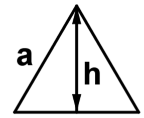
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$




**Gleichseitiges Dreieck**

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

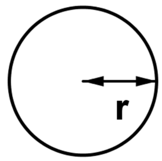
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$




**Kreis**

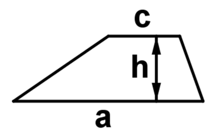
$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

$A = r^2 \cdot \pi$




**Trapez**

$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

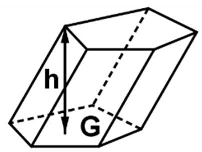



### Raumgeometrie

V: Volumen
G: Grundfläche
M: Mantelfläche
O: Oberfläche

**Prisma**

$V = G \cdot h$

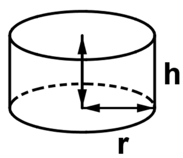



**Pyramide**

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

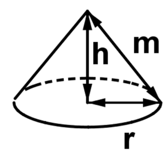

**Gerader Kreiszylinder**

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$




**Gerader Kreiskegel**

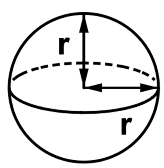
$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$
$M = r \cdot \pi \cdot m$




**Kugel**

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$




### Geradengleichung

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ (Parameterform)

### Ebenengleichung

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ (Parameterform)

$E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$ (Koordinatenform)

$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (Normalenform)

$E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$ (Achsenabschnittsform)

mit den Achsenschnittpunkten
S(s|0|0), T(0|t|0), U(0|0|u)

**Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$**

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

---

**Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts**

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\circ\vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

---

**Vektorprodukt**

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

---

**Eigenschaften und Anwendungen des Vektorprodukts**

- $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Maßzahl F des Flächeninhalts des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$
- Maßzahl V des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\circ\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|$

---

**Lineare Unabhängigkeit**

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.

$\Leftrightarrow$ Die Gleichung $\lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{b} + \nu\cdot\vec{c} = \vec{0}$ ist nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar.

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}\circ\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \neq 0$

---

**Besondere Punkte**

Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

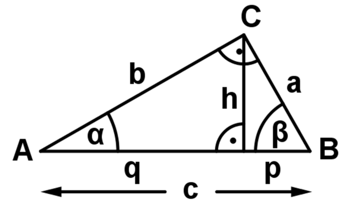
## 5 Trigonometrische Grundlagen

**Rechtwinkliges Dreieck**

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

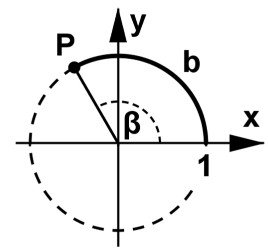
Kathetensatz: $a^2 = cp\,;\; b^2 = cq$




$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

**Beziehungen am Einheitskreis**

- $P(x_P \mid y_P)$ liegt auf dem Einheitskreis
  $\Rightarrow\; \cos\beta = x_P$ und $\sin\beta = y_P$
- $\frac{b}{\pi} = \frac{\beta}{180°}$




**Trigonometrische Beziehungen**

$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \qquad \sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \qquad \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

**Additionstheoreme**

$\sin(2\varphi) = 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi \qquad (\sin\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos\varphi)$

$\cos(2\varphi) = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 \qquad (\cos\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos\varphi)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$

**Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.** ***Stand der Merkhilfe: 11.09.2017***