

Merkhilfe

Mathematik am Gymnasium

1 Inhalte der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Logarithmen

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

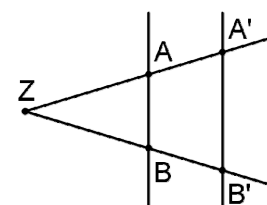
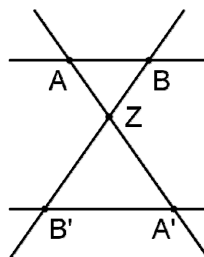
$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Strahlensätze

Ist $AB \parallel A'B'$, so gilt:

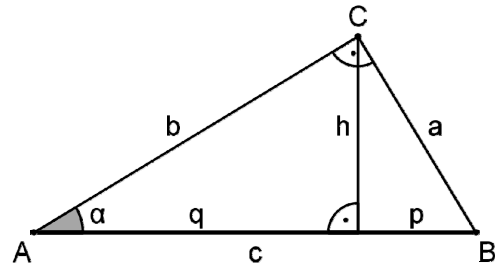
$$\diamond \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}, \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

$$\diamond \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$



Rechtwinkliges Dreieck

- ◆ Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- ◆ Höhensatz: $h^2 = pq$
- ◆ Kathetensatz: $a^2 = cp$, $b^2 = cq$
- ◆ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$



Allgemeines Dreieck

- ◆ Sinussatz: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$
- ◆ Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin \varphi & \cos(-\varphi) &= \cos \varphi & (\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 &= 1 \\ \sin(90^\circ - \varphi) &= \cos \varphi & \cos(90^\circ - \varphi) &= \sin \varphi \end{aligned}$$

Figurengeometrie

- ◆ Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
- ◆ Kreis: $U = 2r\pi$, $A = r^2\pi$

Raumgeometrie

- ◆ Prisma: $V = Gh$
- ◆ Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$
- ◆ gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi h$, $M = 2r\pi h$
- ◆ gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$, $M = r\pi h$
- ◆ Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, $O = 4r^2\pi$

2 Analysis

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^r \cdot \ln x) = 0 \quad (\text{jeweils } r > 0)$$

Ableitung

◆ Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate): $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

◆ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (falls der Grenzwert existiert und endlich ist)

◆ Schreibweisen: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Ableitungen der Grundfunktionen

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Ableitungsregeln

◆ Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

◆ Faktorregel: $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$

◆ Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

◆ Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

◆ Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anwendungen der Differentialrechnung

◆ Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$

◆ Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$

◆ Monotonie

$f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I

$f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I

◆ Extrempunkte

Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Extrempunkt.

◆ Krümmung

$f''(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt

$f''(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt

◆ Wendepunkte

Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

◆ Newton'sche Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f .

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad (F \text{ ist eine Stammfunktion von } f)$$

Unbestimmte Integrale

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \quad (F \text{ ist eine Stammfunktion von } f)$$

3 Stochastik

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Urnenmodell

◆ Ziehen ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{„genau } k \text{ schwarze Kugeln“}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

◆ Ziehen mit Zurücklegen

Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{„genau } k \text{ schwarze Kugeln“}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zufallsgrößen – Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an. Dann gilt:

◆ Erwartungswert: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$

◆ Varianz: $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$

◆ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n;p)$, so gilt:

◆ $P(X = k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

◆ Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$

◆ Varianz: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Signifikanztest

◆ Fehler 1. Art: H_0 wird irrtümlich abgelehnt

◆ Fehler 2. Art: H_0 wird irrtümlich nicht abgelehnt

Als Signifikanzniveau bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

4 Geometrie

Skalarprodukt im \mathbb{R}^3

- ◆ Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- ◆ zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- ◆ Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- ◆ Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- ◆ Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$

Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

- ◆ Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- ◆ Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
- ◆ Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$
- ◆ Flächeninhalt eines Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$
- ◆ Volumen einer dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \circ (\overline{AC} \times \overline{AD})|$

Mittelpunkt einer Strecke [AB]

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

Schwerpunkt eines Dreiecks ABC

$$\vec{S} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

Ebene im \mathbb{R}^3

- ◆ Parameterform: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
- ◆ Normalenform in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$
- ◆ Normalenform in Koordinatendarstellung: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$

Kugelgleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Die Merkhilfe steht unter www.isb.bayern.de → Gymnasium → Fächer → Mathematik zum Download bereit.