Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

1 Äquivalenz von Gleichungen

Gleichungen (Ungleichungen), die bei **gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge** besitzen, heißen **äquivalent**.

Beispiel: $(5+x)\cdot 4=80$ ist äquivalent zu $20+4\cdot x=80$ in $\mathbb{G}=\mathbb{Q}_0^+$,
da beide Gleichungen die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{15\}$ haben.

2 Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Eine derartige Umformung heißt **Äquivalenzumformung**.

Beispiele: $\mathbb{G}=\mathbb{Q}_0^+$

1.
$$\begin{aligned} & 2\cdot x+1=5 && |-1 \\ \Leftrightarrow\; & 2\cdot x=4 && |:2 \\ \Leftrightarrow\; & x=2 && \\ & \mathbb{L}=\{2\} && \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\cdot x-5=2 && |+5 \\ \Leftrightarrow\; & \frac{1}{3}\cdot x=7 && |\cdot 3 \\ \Leftrightarrow\; & x=21 && \\ & \mathbb{L}=\{21\} && \end{aligned}$$

Zur Probe setzt man das Lösungselement ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht!

$2\cdot \mathbf{2}+1=5$ (wahre Aussage) $\qquad \frac{1}{3}\cdot \mathbf{21}-5=2$ (wahre Aussage)

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die Gleichungen mit $\mathbb{G}=\mathbb{Q}_0^+$

a) $x\cdot 10=4$

b) $x-\frac{4}{5}=3\frac{1}{2}$

c) $2\cdot x+3=18$

d) $1,2\cdot y-0,3=4,5$

e) $(17-13)\cdot x+6=11$

f) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot x=\frac{2}{3}$

g) $z:1,6=2,4+9$