

# 9 Mathematik I

(5-stündig)

Die Abfolge der Themenbereiche trägt dem immer enger werdenden Beziehungsgefüge von Geometrie und Algebra Rechnung. Grafische bzw. geometrische Darstellungsformen gewinnen zunehmend an Bedeutung und fördern bei den Schülern die Fähigkeit zu abstrahieren. Offene Aufgabenstellungen sowie Variationen von Aufgaben und Lösungswegen fördern die Vernetzung und Vertiefung der Lerninhalte.

Der sinnvolle Einsatz von elektronischen Rechenhilfsmitteln und geeigneter Software wird in dieser Jahrgangsstufe intensiviert.

## Das Grundwissen wird erweitert um:

### Grundwissen

- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen lösen
- quadratische Gleichungen: Lösungsformel, Bedeutung der Diskriminante, Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen, Tangentialprobleme
- in der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen rechnen
- Definition der Quadratwurzel kennen und anwenden
- einfache Termumformungen mit Quadratwurzeln
- Graphen und Eigenschaften von quadratischen Funktionen, Scheitelform
- Gleichungen von Parabeln ermitteln, Parameterverfahren
- Flächeninhalte ebener Figuren insbesondere auch mithilfe zweireihiger Determinanten
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen, Mantel- bzw. Oberfläche und Volumen von Prismen, Pyramiden, geraden Kreiszylindern und Kreiskegeln sowie von Kugeln
- Abbildung durch zentrische Streckung anwenden
- Streckenlängen mit dem Vierstreckensatz bestimmen
- Berechnungen mithilfe von Vektoren
- Ähnlichkeit von Dreiecken
- mithilfe der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck Streckenlängen berechnen
- Pfadregeln und ihre Anwendung

## M 9.1 Systeme linearer Gleichungen

(ca. 14 Std.)

Die Schüler lernen, die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme zunächst grafisch über die Schnittmenge zweier Geraden zu ermitteln. Dabei erkennen sie, dass je nach Lage der Geraden bei der Lösung unterschiedliche Fälle auftreten. Diesen begegnen sie auch bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mithilfe verschiedener algebraischer Verfahren. Bei vielfältigen Übungen sollen die Schüler ein Gespür für das Auffinden der jeweils günstigsten Lösungsmethode bekommen. Vor allem beim Determinantenverfahren entwickeln die Schüler algorithmisches Denken. Das Determinantenverfahren liefert einen umsetzbaren Algorithmus zum automatisierten Lösen von linearen Gleichungssystemen (Taschenrechner, Tabellenkalkulationsprogramm).

- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen: grafische und algebraische Lösung (auch Determinantenverfahren)
- Aufgaben mit geometrischen Problemstellungen algebraisch lösen

## M 9.2 Reelle Zahlen

(ca. 10 Std.)

An einem geeigneten Beispiel entdecken die Schüler die Unvollständigkeit der Menge der rationalen Zahlen und vollziehen die Erweiterung zur Menge der reellen Zahlen. Durch systematisches Probieren unter Verwendung eines Rechners ermitteln sie eine Lösung einer Gleichung der Form  $x^2 = a$ . Mit dem Wurzelbegriff und den Termumformungsregeln für Quadratwurzeln eröffnet sich den Schülern ein wichtiger Zugang zur Bearbeitung weiterer algebraischer und geometrischer Inhalte.

- Lösungen der Gleichung  $x^2 = a$ ; Nachweis der Irrationalität (z. B. für  $a = 2$ ); Definition der Quadratwurzel; Erweiterung des Zahlenbereichs ( $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ); reelle Zahlen auf der Zahlengeraden
- Iterationsverfahren mithilfe eines Rechners (z. B. Heron-Verfahren) zur näherungsweisen Ermittlung von  $x$  für  $x^2 = a$
- Umformen von Termen mit Quadratwurzeln (Radizieren von Produkten bzw. Quotienten, teilweises Radizieren, Rationalmachen des Nenners); Rechnen in  $\mathbb{R}$

## M 9.3 Quadratische Funktionen [VSE]

(ca. 17 Std.)

Bei der Beschäftigung mit quadratischen Funktionen und ihren Graphen, die auch geometrisch als Ortslinien erzeugt werden, erfahren die Schüler die enge Verflechtung von Algebra und Geometrie. Sie erweitern und vertiefen ihre bisher erworbenen Kenntnisse über Funktionen und zugehörige Umkehrrelationen. Dabei erleichtert der Einsatz eines elektronischen Rechenhilfsmittels das Auffinden von Eigenschaften der Graphen. Sie lernen, funktionale Zusammenhänge zu erfassen und Extremwertprobleme zu bearbeiten.

- Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = ax^2 + bx + c$ : Graphen und Eigenschaften; Sonderformen; Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung für verschobene Parabeln (Ermittlung auch mit dem Parameterverfahren)
- Gleichungen von Parabeln ermitteln
- Untersuchen von Parabelscharen mit einem Parameter in der Schargleichung (u. a. Scheitelpunktsform der Schargleichung; Gleichung des Trägergraphen der Scheitelpunkte der Scharparabeln)
- Bearbeiten von Extremwertproblemen
- Umkehrung quadratischer Funktionen; die Wurzelfunktion mit  $y = \sqrt{x}$

## M 9.4 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

(ca. 12 Std.)

Die Schüler lernen, quadratische Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen sicher zu lösen. Damit werden sie befähigt, geometrische Zusammenhänge in Aufgaben aus den Bereichen Abbildungen, Flächensätze und Raumgeometrie algebraisch zu bearbeiten. Bei der rechnerischen Lösung von Wurzelgleichungen werden die Schüler auf die Probleme beim Quadrieren solcher Gleichungen aufmerksam.

- quadratische Gleichungen: grafische Lösung, Herleitung der Lösungsformel; Diskriminante und Lösbarkeit
- quadratische Gleichungen mit Parametern
- quadratische Ungleichungen
- einfache Wurzelgleichungen unter Beachtung der Definitionsmenge; Äquivalenzumformungen

## M 9.5 Systeme mit quadratischen Gleichungen

(ca. 10 Std.)

Die Schüler wenden die bisher erworbenen Kenntnisse an, um Schnitt- und Tangentialprobleme zu erörtern und Lösungen dafür zu finden. Dabei wird ihnen die Bedeutung der Diskriminante bei quadratischen Gleichungen bewusst.

- Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen (nur mit Bestimmungsgleichungen, die höchstens quadratisch sind und höchstens einen Parameter enthalten)
- Tangentialprobleme und Diskriminante

## M 9.6 Flächeninhalt ebener Vielecke

(ca. 11 Std.)

Die Schüler vergleichen die Flächeninhalte von Figuren durch Zerlegung in paarweise kongruente Teilfiguren und entdecken, dass zerlegungsgleiche Figuren flächengleich sind. Sie erarbeiten grundlegende Flächeninhaltsformeln, mit denen sie die Flächeninhalte beliebiger Vielecke bestimmen. Sie lernen, die Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken in der Koordinatenebene zu berechnen. Sie erweitern damit ihre Fähigkeit, geometrische Probleme algebraisch zu bearbeiten und funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.

- Zerlegungsgleichheit von Figuren; Höhen im Dreieck, im Parallelogramm und im Trapez
- Formeln für den Flächeninhalt von Parallelogramm, Dreieck, Trapez und Drachenviereck
- Flächeninhalte ebener Figuren auch mithilfe zweireihiger Determinanten berechnen; Aufgaben unter Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten lösen und Extremwerte berechnen

## M 9.7 Abbildung durch zentrische Streckung

(ca. 17 Std.)

Die Schüler führen maßstäbliche Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen von Figuren durch und gelangen so zur Abbildung durch zentrische Streckung, die sie sowohl geometrisch-konstruktiv wie auch algebraisch mithilfe von Vektoren erfassen und in vielfältigen Übungsaufgaben anwenden.

- Abbildung durch zentrische Streckung: Abbildungsvorschrift, Abbildungseigenschaften
- zeichnerische Ermittlung von Bildpunkten, Ursprung und Streckungszentrum; Einbeschreibungsaufgaben
- Vierstreckensatz; Ermitteln von Streckenlängen; Schwerpunkt des Dreiecks
- zentrische Streckung mithilfe von Vektoren; Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl; Darstellung der Abbildungsvorschrift mithilfe von Vektoren
- Berechnungen: Koordinaten von Bildpunkten, Ursprung und Zentrum; Streckungsfaktor; Gleichungen von Bildgeraden und Bildparabeln (Parameterverfahren); Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks
- Ähnlichkeitssätze für Dreiecke (Herleitung eines Satzes); Nachweis der Ähnlichkeit von Dreiecken
- praxisorientierte Aufgaben (z. B. aus der Vermessung)

## M 9.8 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

(ca. 14 Std.)

Die Schüler finden und begründen Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck und erschließen damit die Möglichkeit, Streckenlängen in ebenen Figuren, in Körpern und im Koordinatensystem zu berechnen. Auch hier entwickeln die Schüler ihre Fertigkeit weiter, geometrische Probleme algebraisch zu bearbeiten und funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.

- Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (aus der Geschichte: Euklid, Pythagoras)
- Berechnen von Streckenlängen (auch im Koordinatensystem und in Körpern): u. a. Länge der Diagonalen des Rechtecks und des Quadrats, Höhe des gleichseitigen Dreiecks, Betrag des Vektors

## M 9.9 Berechnungen am Kreis

(ca. 7 Std.)

Die Schüler begründen den bereits bekannten proportionalen Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser bzw. zwischen dem Inhalt der Kreisfläche und dem Quadrat des Kreisradius, und zwar mithilfe anschaulich durchgeführter Grenzwertüberlegungen. Eine näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl (Proportionalitätsfaktor) führen die Schüler mithilfe des Taschenrechners oder des Computers durch.

- Kreiszahl  $\pi$  und ihre näherungsweise Bestimmung; Umfang und Flächeninhalt des Kreises (aus der Geschichte: Kreiszahl  $\pi$ )
- Kreisbogen und Kreissektor
- Berechnungen am Kreis und bei Kreisteilen (auch an zusammengesetzten Figuren)

## M 9.10 Raumgeometrie

(ca. 16 Std.)

Die Schüler verwenden die Zerlegungsgleichheit von Körpern, um aus dem Volumen des Quaders das Volumen eines geraden Prismas herzuleiten. Sie lernen das Prinzip des Cavalieri kennen und erfahren, wie man mit ihm das Volumen weiterer Körper ermitteln kann.

- Prisma und Pyramide: Netz, Mantel- und Oberfläche; Prinzip des Cavalieri; Volumen von Prisma und Pyramide
- gerader Kreiszylinder und gerader Kreiskegel als Rotationskörper: Axialschnitt, Mantellinie; Abwicklung, Mantelfläche, Oberfläche und Volumen
- Kugel: Oberfläche und Volumen
- Anwendungsaufgaben unter besonderer Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten und auch unter Einbeziehung zusammengesetzter Körper

## M 9.11 Daten und Zufall

(ca. 12 Std.)

Aufbauend auf den Inhalten der Jahrgangsstufe 8 beschäftigen sich die Schüler systematisch mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten und veranschaulichen den Ablauf solcher Vorgänge an Baumdiagrammen. Mithilfe der Pfadregeln bestimmen sie Wahrscheinlichkeiten, die sie anhand von Simulationen (grafikfähiger Taschenrechner, Tabellenkalkulation, Statistiksoftware) überprüfen. Abweichungen bei Messreihen oder statistischen Erhebungen beschreiben die Schüler mit den Kenngrößen Varianz und Standardabweichung.

- zusammengesetzte Zufallsexperimente
- Pfadregeln
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

## 9 Mathematik II/III

(3-stündig)

Die Beziehungen zwischen Geometrie und Algebra werden in der Jahrgangsstufe 9 weiter ausgebaut. Die Schüler erweitern ihre Fähigkeiten, geometrische Probleme algebraisch zu bearbeiten, funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen und dabei verstärkt elektronische Rechenhilfsmittel und geeignete Software einzusetzen.

Offene Aufgabenstellungen sowie Variationen von Aufgaben und Lösungswegen fördern die Vernetzung und Vertiefung der Lerninhalte.

### Das Grundwissen wird erweitert um:

#### Grundwissen

- Funktionsbegriff
- Geradengleichungen aufstellen und zu gegebenen Gleichungen die Graphen der Geraden zeichnen
- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen lösen
- Definition der Quadratwurzel kennen und anwenden
- in der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen rechnen
- Flächeninhalte ebener Figuren insbesondere auch mithilfe zweireihiger Determinanten berechnen
- Abbildung durch zentrische Streckung anwenden
- Streckenlängen mit dem Vierstreckensatz bestimmen
- mithilfe der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck Streckenlängen berechnen
- Schrägbilder von Körpern zeichnen
- Pfadregeln und ihre Anwendung

### M 9.1 Funktionen [VSE]

(ca. 4 Std.)

Anhand praktischer Beispiele lernen die Schüler Funktionen kennen und beschreiben sie mathematisch.

- Produktmengen als Grundmengen
- Funktionen; Graphen; Funktionsterm; Definitions- und Wertemenge; Funktionswert; Nullstelle

### M 9.2 Lineare Funktionen [VSE]

(ca. 13 Std.)

Ausgehend von der direkten Proportionalität erschließen die Schüler die linearen Funktionen. Sie erarbeiten wichtige Eigenschaften dieser Funktionen und ihrer Graphen. Der Einsatz elektronischer Rechenhilfsmittel, z. B. des grafikfähigen Taschenrechners, erleichtert den Schülern das Auffinden dieser Eigenschaften. Vielfältige Übungen ermutigen und befähigen sie zu beobachten und zu entdecken, zu schließen und zu begründen.

- Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = mx$ ; Ursprungsgeraden als Graphen, Steigung  $m$  als Parameter; Geradenbüschel im Ursprung; Zusammenhang zwischen den Steigungen orthogonaler Geraden
- Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = mx + t$ ; verschobene Ursprungsgeraden als Graphen; parallele Geraden
- Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung
- Gleichungen achsenparalleler Geraden
- praxisorientierte Aufgaben

### M 9.3 Systeme linearer Gleichungen

(ca. 12 Std.)

Die Schüler lernen, die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme zunächst grafisch über die Schnittmenge zweier Geraden zu ermitteln. Dabei erkennen sie, dass je nach Lage der Geraden bei der Lösung unterschiedliche Fälle auftreten. Diesen begegnen sie auch bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mithilfe verschiedener algebraischer Verfahren unter Verwendung von Taschenrechnern oder Computern.

- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen: grafische und algebraische Lösung
- Aufgaben mit geometrischen Problemstellungen sowie Sachaufgaben algebraisch lösen

### M 9.4 Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

(ca. 6 Std.)

An einem geeigneten Beispiel entdecken die Schüler die Unvollständigkeit der Menge der rationalen Zahlen und vollziehen die Erweiterung zur Menge der reellen Zahlen. Anhand der Gleichung  $x^2 = a$  lernen sie den Wurzelbegriff kennen. Mit den Termumformungsregeln für Quadratwurzeln eröffnen sich die Schüler einen wichtigen Zugang zur späteren Bearbeitung weiterer algebraischer und geometrischer Inhalte.

- Lösungen der Gleichung  $x^2 = a$
- irrationale Zahlen; Definition der Quadratwurzel
- Erweiterung des Zahlenbereichs auf  $\mathbb{R}$ ; reelle Zahlen auf der Zahlengeraden
- Umformen von einfachen Termen mit Quadratwurzeln; Rechnen in  $\mathbb{R}$

### M 9.5 Flächeninhalt ebener Vielecke

(ca. 11 Std.)

Die Schüler vergleichen die Flächeninhalte von Figuren durch Zerlegung in paarweise kongruente Teilfiguren und entdecken, dass zerlegungsgleiche Figuren flächengleich sind. Sie erarbeiten grundlegende Flächeninhaltsformeln, mit denen sie die Flächeninhalte beliebiger Vielecke bestimmen. Sie lernen, die Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken in der Koordinatenebene zu berechnen, und erweitern damit ihre Fähigkeit, geometrische Probleme algebraisch zu bearbeiten und funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.

- Formeln für den Flächeninhalt von Parallelogramm, Dreieck, Trapez und Drachenviereck
- Berechnen von Flächeninhalten ebener Figuren (auch mithilfe zweireihiger Determinanten); Aufgaben unter Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten lösen und Extremwerte berechnen

### M 9.6 Abbildung durch zentrische Streckung

(ca. 12 Std.)

Die Schüler führen maßstäbliche Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen von Figuren durch und gelangen so zur Abbildung durch zentrische Streckung, die sie sowohl geometrisch-konstruktiv als auch algebraisch erfassen und in vielfältigen, insbesondere praxisorientierten Übungsaufgaben anwenden.

- Abbildung durch zentrische Streckung: Abbildungsvorschrift und Eigenschaften
- zeichnerische Ermittlung von Bildpunkten, Ursprung und Streckungszentrum; Einbeschreibungsaufgaben
- Vierstreckensatz; Ermitteln von Streckenlängen
- Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
- praxisorientierte Aufgaben (z. B. aus der Vermessung)

### M 9.7 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

(ca. 10 Std.)

Die Schüler finden und begründen Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck und erschließen damit die Möglichkeit, Streckenlängen in ebenen Figuren und im Koordinatensystem zu berechnen. Auch hier entwickeln die Schüler ihre Fertigkeit weiter, geometrische Probleme algebraisch zu bearbeiten und funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.

- Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck (aus der Geschichte: Euklid, Pythagoras)
- Berechnen von Streckenlängen (auch im Koordinatensystem: u. a. Länge der Diagonalen des Rechtecks und des Quadrats, Höhe des gleichseitigen Dreiecks)

### M 9.8 Grundlagen der Raumgeometrie

(ca. 10 Std.)

Mithilfe von Modellen und geeigneten Computerprogrammen erkennen die Schüler wesentliche Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen sowie besondere Winkel im Raum und schulen dabei ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Sie begreifen, dass Schrägbilder ein erprobtes Mittel sind, um anschauliche Bilder von Körpern in der Zeichenebene zu erhalten, und stellen dabei fest, dass die Maßtreue im Allgemeinen verloren geht, können aber mithilfe der Flächensätze die wahren Längenmaße ermitteln.

- Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen im Raum; Winkel zwischen Ebene und Gerade; Winkel zwischen zwei Ebenen
- Darstellen von Körpern im Schrägbild (Verzerrungswinkel und Verzerrungsfaktor)
- Anwendung der Flächensätze

### M 9.9 Daten und Zufall

(ca. 6 Std.)

Aufbauend auf den Inhalten der Jahrgangsstufe 8 beschäftigen sich die Schüler systematisch mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten und veranschaulichen den Ablauf solcher Vorgänge an Baumdiagrammen. Mithilfe der Pfadregeln bestimmen sie Wahrscheinlichkeiten.

- zusammengesetzte Zufallsexperimente
- Pfadregeln